Solution 4.6

$$x(t) = v_0 \cos\alpha\, t \quad (1)$$
$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + y_0 \quad (2)$$
$$z(t) = 0 \quad (3)$$

(1) $v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_0 \cos\alpha\, t \right) = v_0 \cos\alpha$

$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + y_0\right) = -gt + v_0 \sin\alpha$

$v_z = \frac{dz}{dt} = 0$

$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_0 \cos\alpha\right) = 0$

$a_y = \frac{dv_y}{dt} = +\frac{d}{dt}\left(-gt + v_0 \sin\alpha\right) = -g.$

$a_z = \frac{dv_z}{dt} = 0$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{v} = a_x \times v_x + a_y \times v_y + a_z \times v_z$

$= 0 \times v_x + (-g)(-gt + v_0 \sin\alpha) + 0 \times 0$

$= g\left(-v_0 \sin\alpha + gt\right)$

$\vec{a}\cdot\vec{v} \geqslant 0$ si $t \geqslant \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$ (mvt accéléré)

$\vec{a}\cdot\vec{v} \leq 0$ si $t \leq \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$ (— décéléré).

(3) L'équation de la trajectoire est la fonction $f(x,y,z)$ où le temps n'apparaît plus. (3) $\Rightarrow$ la trajectoire est dans un plan.

(1) $\Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$

(2) $\Rightarrow y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + y_0$

$= -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \times \frac{x}{v_0 \cos\alpha} + y_0$

$$\boxed{y = -\frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} + x \tan\alpha + y_0} \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

C'est l'équation d'une parabole (de la forme $y = ax^2 + bx + c$)