Description d'un mouvement

Référentiel, vecteurs position, vitesse, accélération

Classe de Terminale – Spécialité SPC

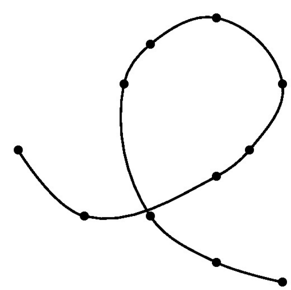
Référentiel
Vecteur position
Vecteur vitesse
Vecteur accélération
Différents types de mouvement

Référentiel
Vecteur position
Vecteur vitesse
Vecteur accélération
Différents types de mouvement

1 Référentiel
2 Vecteur position
3 Vecteur vitesse
4 Vecteur accélération
5 Différents types de mouvement

Référentiel
Vecteur position
Vecteur vitesse
Vecteur accélération
Différents types de mouvement

Suivons le vol d'un magnifique papillon ! On pointe la position du papillon à différents instants pour obtenir la courbe suivante :



Référence implicite

Référentiel
Vecteur position
Vecteur vitesse
Vecteur accélération
Différents types de mouvement

Pour décrire ce mouvement, nous avons pris une référence implicite, inconsciente (normalement, il ne faudrait pas qu'elle continue de l'être) : bibi !

Nous avons pointé la position du papillon par rapport à ce que nous avons vu. Nous nous sommes pris comme référence.

Référentiel
Vecteur position
Vecteur vitesse
Vecteur accélération
Différents types de mouvement

Ajoutons à cette **référence**,

ou une (mouvement décrit le long d'une droite)

ou deux (mouvement décrit dans un plan)

ou trois (mouvement décrit dans l'espace)

directions fixes, comme la direction d'étoiles lointaines, si lointaines, que malgré le mouvement qui est le leur, à cause de leur éloignement, elles nous semblent immobiles.

Ajoutons encore à notre paquetage une horloge,

nous avons un **référentiel**

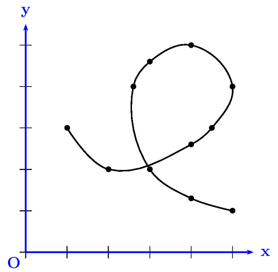
A retenir

Référentiel
Vecteur position
Vecteur vitesse
Vecteur accélération
Différents types de mouvement

Un référentiel est constitué

- d'une référence (notée O)
- de plusieurs directions fixes perpendiculaires entre elles (les abscisses le long de ces directions sont notées x, y et z)
- d'une horloge qui donne le temps (noté t)

et le vol de notre papillon devient



Exemples de référentiels

Référentiel
Vecteur position
Vecteur vitesse
Vecteur accélération
Différents types de mouvement

- Référentiel **héliocentrique** : O = centre du Soleil
- Référentiel **géocentrique** : O = centre de la Terre
- Référentiel **terrestre** : O = le point qu'on veut

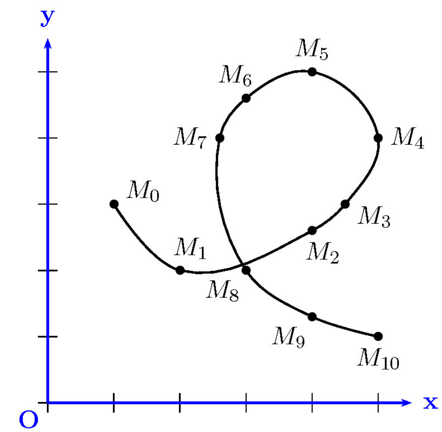
Notation importante à comprendre

Nous avons pointé la position (notée M) de notre papillon à différents instants :

- à l'instant t_0, le papillon est au point $M(t_0) = M_0$
- à l'instant t_1, le papillon est au point $M(t_1) = M_1$
- ...
- à l'instant t_i, le papillon est au point $M(t_i) = M_i$
- à l'instant t_{i+1}, le papillon est au point $M(t_{i+1}) = M_{i+1}$
- à l'instant t_{i-1}, le papillon est au point $M(t_{i-1}) = M_{i-1}$

L'indice est une indication temporelle. M_3 est une position ultérieure à M_1.

Référentiel
Vecteur position
Vecteur vitesse
Vecteur accélération
Différents types de mouvement

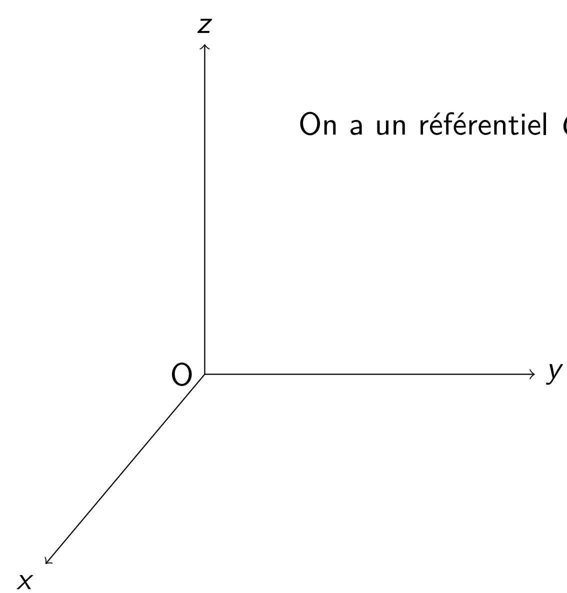


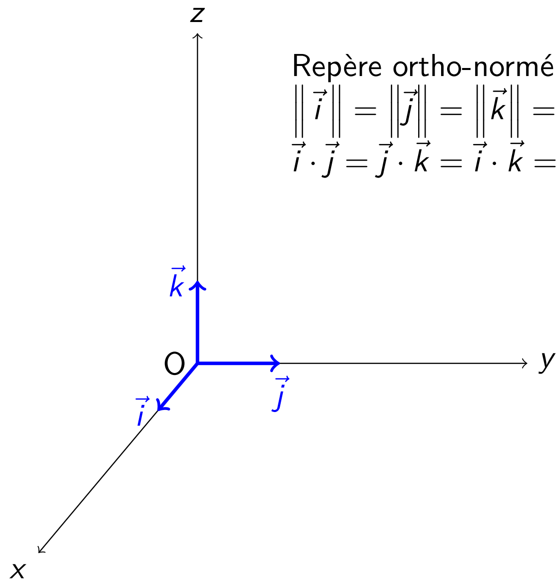
On sait dans quel sens est décrit la trajectoire grâce à l'indexation des points.

Référentiel
Vecteur position
Vecteur vitesse
Vecteur accélération
Différents types de mouvement

Référentiel
Vecteur position
Vecteur vitesse
Vecteur accélération
Différents types de mouvement

On a un référentiel $O(x, y, z, t)$

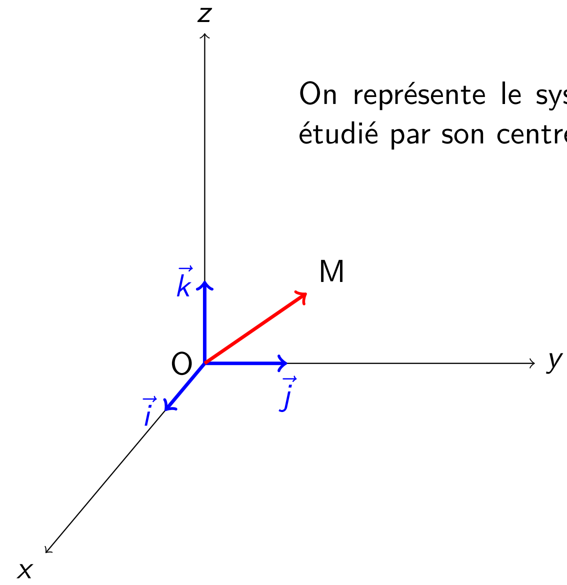




Repère ortho-normé

$$\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1$$

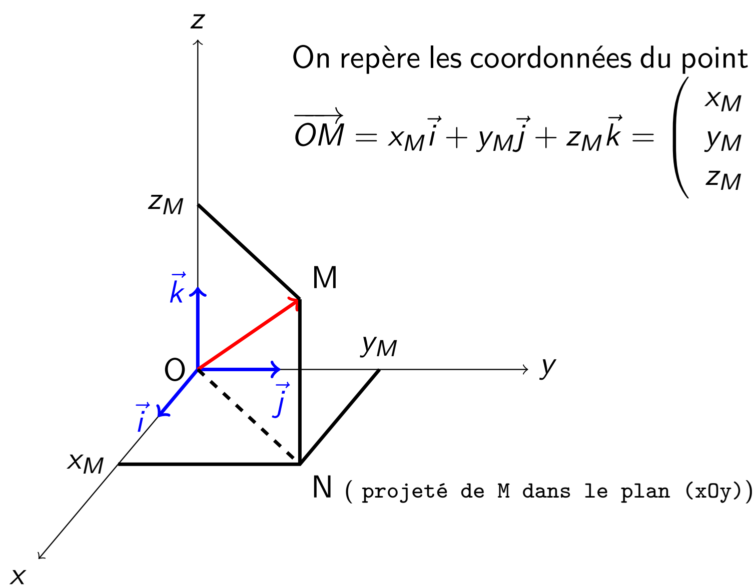
$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{i}\cdot\vec{k} = 0$$



On représente le système mécanique étudié par son centre de gravité M

On repère les coordonnées du point M

$$\overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k} = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$$



Abus de langage pratique

Plutôt que d'écrire l'indice $_M$ de partout :

$$\overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k} = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$$

on écrit plutôt que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

confondant « abscisse x » et « direction x »

Lorsque le système étudié est en mouvement

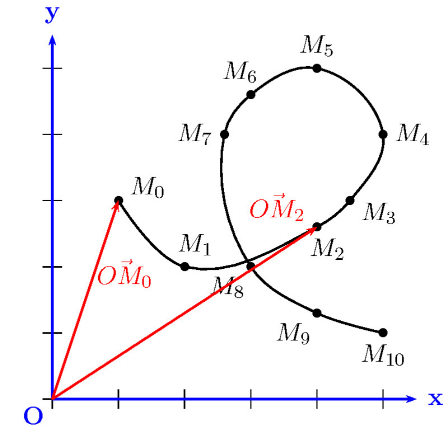
$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

les coordonnées x, y, z sont des fonctions du temps t, on les appelle les **lois horaires** du mouvement.

Référentiel
Vecteur position
Vecteur vitesse
Vecteur accélération
Différents types de mouvement

Si on revient à notre papillon ...

$$\vec{OM_i} = \text{vecteur position à l'instant } t_i$$



Référentiel
Vecteur position
Vecteur vitesse
Vecteur accélération
Différents types de mouvement

Formule de la vitesse

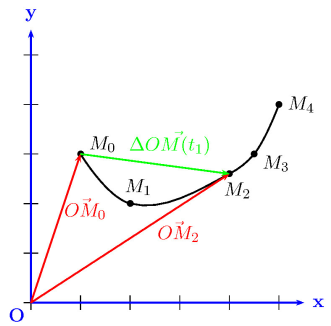
Référentiel
Vecteur position
Vecteur vitesse
Vecteur accélération
Différents types de mouvement

$$\text{vitesse } v = \frac{\text{distance parcourue } d}{\text{temps de parcours } \Delta t}$$

Conseil : mettre les unités sur la formule avant l'application numérique

Introduction au vecteur vitesse

$$\vec{OM}_2 = \vec{OM}_0 + \Delta\vec{OM}(t_1)$$
$$\Delta\vec{OM}(t_1) = \vec{OM}_2 - \vec{OM}_0$$



Le vecteur $\Delta\vec{OM}(t_1)$ est appelé *variation du vecteur position* à l'instant t_1 (entre l'instant t_0 et t_2).

Vecteur vitesse

On appelle vecteur vitesse $\vec{v}(t_1)$ la quantité

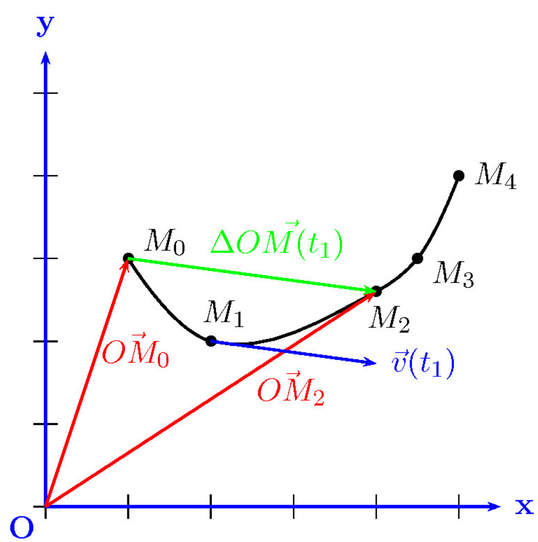
$$\vec{v}(t_1) = \frac{\vec{OM}_2 - \vec{OM}_0}{t_2 - t_0} = \frac{\Delta\vec{OM}(t_1)}{\Delta t}$$

Propriétés du vecteur vitesse

- direction = tangente à la trajectoire
- sens = celui du mouvement
- longueur = valeur v de la vitesse en ce point

Formule générale

$$\vec{v}_i = \vec{v}(t_i) = \frac{\vec{OM}_{i+1} - \vec{OM}_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{\Delta\vec{OM}(t_i)}{\Delta t}$$



Définition mathématique du vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Notation : $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ qui se lit « dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps t »

A retenir sur le vecteur vitesse

- le vecteur vitesse décrit comment varie le vecteur position par unité de temps
- le vecteur vitesse est défini comme la dérivée du vecteur position par rapport au temps

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

- calcul de la vitesse : pour des raisons de précision, on prend le point d'après et le point d'avant

$$\vec{v}_i = \vec{v}(t_i) = \frac{\overrightarrow{OM}_{i+1} - \overrightarrow{OM}_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

Référentiel
Vecteur position
Vecteur vitesse
Vecteur accélération
Différents types de mouvement

Référentiel
Vecteur position
Vecteur vitesse
Vecteur accélération
Différents types de mouvement

On recommence le processus

On vient de faire :

$$\text{vecteur position } \vec{OM} \longrightarrow \text{variation du vecteur position } \Delta\vec{OM}$$

$$\downarrow$$

$$\text{vecteur vitesse } \vec{v}$$

Maintenant, on continue

$$\text{vecteur vitesse } \vec{v} \longrightarrow \text{variation du vecteur vitesse } \Delta\vec{v}$$

$$\downarrow$$

$$\text{vecteur accélération } \vec{a}$$

Référentiel
Vecteur position
Vecteur vitesse
Vecteur accélération
Différents types de mouvement

Formule générale

$$\vec{v}(t_i) = \frac{\vec{OM}_{i+1} - \vec{OM}_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{\Delta\vec{OM}(t_i)}{\Delta t}$$

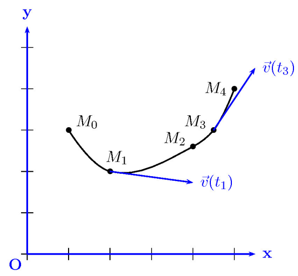
Formule à retenir pour l'accélération

$$\vec{a}(t_i) = \frac{\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{\Delta\vec{v}(t_i)}{\Delta t}$$

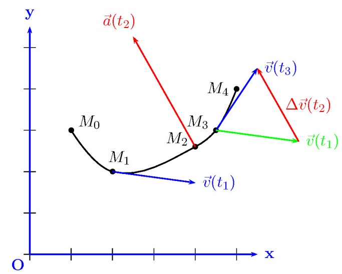
Propriétés du vecteur accélération $\vec{a}$

- direction et sens = celui de $\Delta\vec{v}$
- longueur = valeur a calculée par la formule

Pour notre papillon



On place $\vec{v}(t_3)$



On calcule $\Delta\vec{v}(t_2)$, puis $\vec{a}(t_2)$.

A retenir sur le vecteur accélération

Référentiel
Vecteur position
Vecteur vitesse
Vecteur accélération
Différents types de mouvement

- le vecteur accélération décrit comment varie le vecteur vitesse par unité de temps
- le vecteur accélération est défini comme la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

- calcul de l'accélération : pour des raisons de précision, on prend le point d'après et le point d'avant

$$\vec{a}_i = \vec{a}(t_i) = \frac{\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

Récapitulatif

Référentiel
Vecteur position
Vecteur vitesse
Vecteur accélération
Différents types de mouvement

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$OM = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \qquad v = \|\vec{v}\| \qquad a = \|\vec{a}\|$$

Référentiel
Vecteur position
Vecteur vitesse
Vecteur accélération
Différents types de mouvement

Mouvement rectiligne

besoin d'une seule coordonnées d'espace pour le décrire

Mouvement uniforme

la **norme** du vecteur vitesse est constante

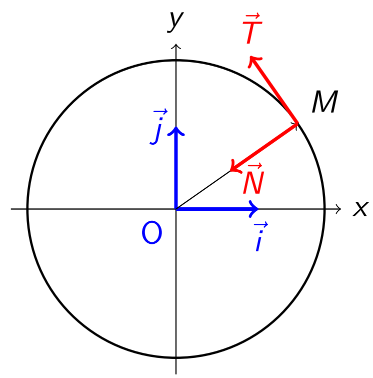
ex : mvt rectiligne uniforme, mvt circulaire uniforme

Mouvement rectiligne uniforme

le vecteur vitesse est un **vecteur constant**

Mouvement circulaire

c'est un mouvement plan $\rightarrow$ 2 coordonnées d'espace x et y



référentiel $(O, \vec{i}, \vec{j})$
$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$

référentiel **local** $(M, \vec{T}, \vec{N})$
repère de Frenet
$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{r} \vec{N}$
ici $v = v(t) = \|\vec{v}\|$ et $\vec{v} = v\vec{T}$

Mouvement circulaire uniforme et repère de Frenet

$$\vec{a} = \frac{v^2}{r} \vec{N}$$

Base de Frenet

$$\left\|\vec{T}\right\| = \left\|\vec{N}\right\| = 1 \qquad \vec{T} \cdot \vec{N} = 0$$

A la différence des vecteurs de base $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ qui sont constants au cours du temps, les vecteurs $\vec{T}$ et $\vec{N}$ ont leur direction qui change au cours du mouvement.
Simplifie les calculs pour les mouvements circulaires

Qualificatifs d'un mouvement

- $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$: mouvement décéléré
- $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$: mouvement uniforme
- $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$: mouvement accéléré