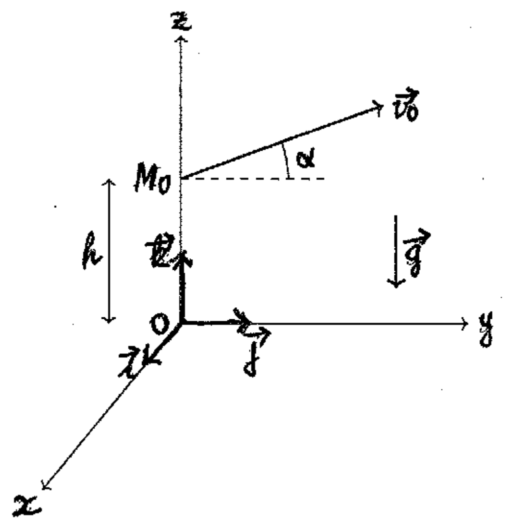
Solution 5.1



<u>système</u> = { ballon de masse m }

<u>référentiel du laboratoire supposé galiléen</u> (pour pouvoir appliquer le principe fondamental de la dynamique).

<u>cinématique</u> : on explique les vecteurs utilisés pour décrire le mouvement et leurs relations

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

<u>bilan des forces</u> appliquées au système. Ne compte que les forces extérieures car la contribution des forces internes au système est nulle à cause du principe des actions réciproques.

* le poids $\vec{P} = m\vec{g} = m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ où $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$

* frottements de l'air négligés
* poussée d'Archimède exercée par les forces de pression sur ballon négligeables (résultat admis qu'il faudrait démontrer)
* la valeur du champ de pesanteur g est constante dans la zone d'étude du mouvement.

<u>Principe fondamental de la dynamique</u> appliqué au système - (On peut le faire puisque le référentiel est supposé galiléen, ce qui est le cas pour des expériences de courte durée devant une journée).

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}$$

m est la masse du système
$\vec{a}$ est son vecteur accélération
$\sum \vec{F}_{ext}$ est la somme vectorielle de toutes les forces appliquées au système.
ici, il n'y a que le poids $\vec{P}$

$$m\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \vec{P} = m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} = m\vec{g} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

d'où les unités de $\underline{g = 9.81 \ m.s^{-2}}$ et l'appelation par fois d'accélération de la pesanteur pour g.

<u>Calcul de la vitesse</u> : on intègre le vecteur $\vec{a}$

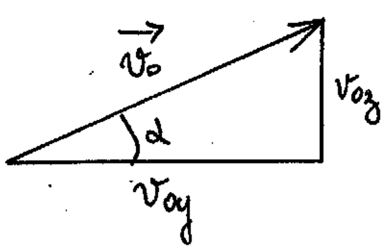
Par définition, $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ soit $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \qquad v_x(t) = A = \text{constante}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 0 \qquad v_y(t) = B = \text{constante a priori différente de } A$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = -g \qquad v_z(t) = -gt + \underset{\text{constante}}{C}$$

<u>Détermination des constantes d'intégration A, B et C</u> qui interviennent dans le vecteur vitesse - On détermine grâce à l'énoncé le vecteur vitesse initial $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0)$.



$$\cos\alpha = \frac{adj}{hyp} = \frac{v_{0y}}{v_0} \qquad v_{0y} = v_0 \cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{opp}{hyp} = \frac{v_{0z}}{v_0} \qquad v_{0z} = v_0 \cos\alpha$$

$v_{0x} = 0$ d'après l'énoncé

<u>A $t=0$</u>, on a $\quad v_x(t=0) = A = 0$

$$v_y(t=0) = B = v_0 \cos\alpha$$

$$v_z(t=0) = -g \times 0 + C = C = v_0 \sin\alpha$$

Donc le vecteur vitesse est $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \cos\alpha \\ -gt + v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$

<u>Calcul du vecteur position</u> par intégration du vecteur position

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 0 \qquad x(t) = D = \text{constante}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \cos\alpha \qquad y(t) = v_0 \cos\alpha \, t + E$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha \qquad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha \, t + F$$

Constante

<u>Détermination des constantes d'intégration D, E et F</u> qui interviennent dans le vecteur position. D'après l'énoncé, on a

$$\vec{OM_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x(0=t) &= D = 0 \\ y(t=0) &= E = 0 \\ z(t=0) &= F = h \end{aligned}$$

d'où

$$\vec{OM} \left\{ \begin{aligned} x(t) &= 0 \\ y(t) &= v_0 \cos\alpha \, t \\ z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha \, t + h \end{aligned} \right.$$

<u>équations horaires</u> du mouvement.

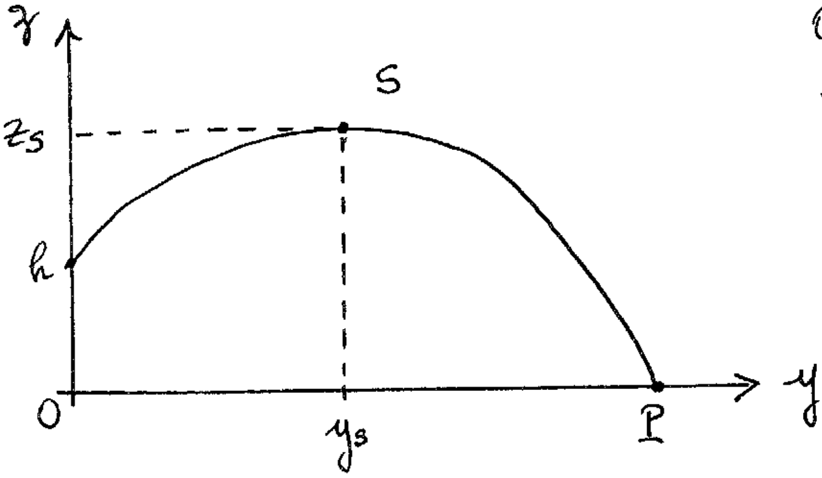
Equation de la trajectoire : on élimine le temps des équations horaires :

$$t = \frac{y}{v_0 \cos\alpha}$$

$$z = -\frac{1}{2} g \frac{y^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + v_0 \sin\alpha \times \frac{y}{v_0 \cos\alpha} + h \qquad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

$$\boxed{z = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} y^2 + y \tan\alpha + h} \leftarrow \text{équation de la trajectoire}$$

Points caractéristiques de la trajectoire :



OP = portée du tir

z_S = flèche du tir

Calcul de la portée : $z_P = 0$ on cherche les solutions l'éq. de la trajectoire dans ce cas → 2 solutions y_P dont on garde seulement la valeur $y_P > 0$.

Calcul de la flèche : on cherche l'instant t_S tel que $v_z(t_S) = 0$ et on reporte $z_S = z(t_S)$.