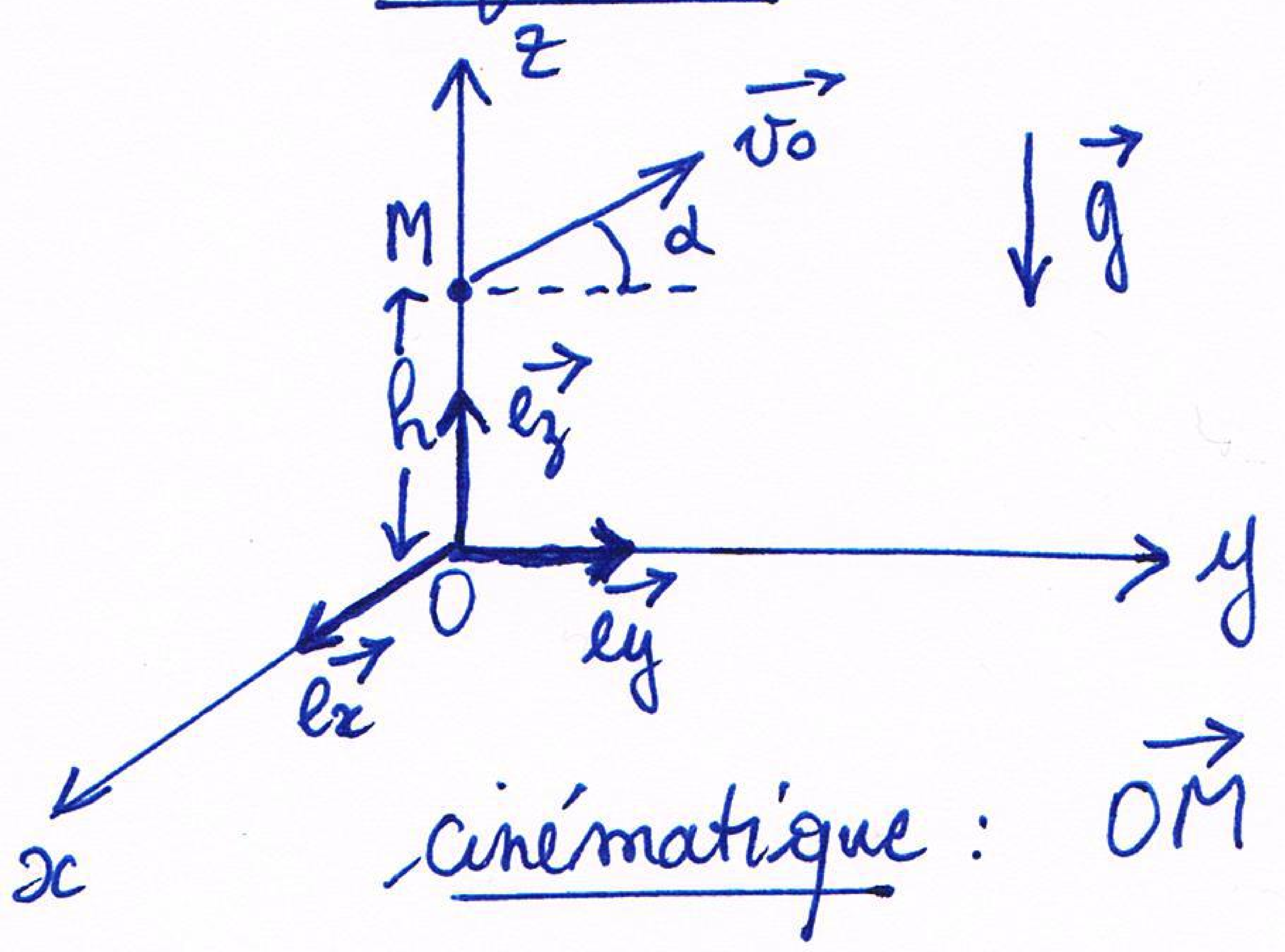
1- Mouvement dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme.

<u>système</u> = { ballon } de masse m.

<u>référentiel</u> du laboratoire supposé galiléen.



On lance un ballon d'une hauteur h à la vitesse $\vec{v_0}$ faisant un angle α avec l'horizontale.
Le ballon est repéré par le point M (centre de gravité).

<u>cinématique</u> : $\vec{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\vec{v} = v_x\vec{e_x} + v_y\vec{e_y} + v_z\vec{e_z} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}. \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

<u>bilan des forces</u> appliquées au système

* le poids $\vec{P} = m\vec{g} = m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ avec $\vec{g} = -g\,\vec{e_z}$

* on néglige les frottements de l'air sur le ballon.
et on suppose que la valeur de g ne change pas dans la zone où a lieu le mouvement.

<u>2ème loi de Newton</u> appliquée au ballon dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

la masse du ballon ne change pas : $m\vec{a} = \Sigma\vec{F_{ext}}$

$$m\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \vec{P} = m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g. \end{cases}$$

$\boxed{\vec{a} = +\vec{g}}$ d'où les unités de <u>g = 9.81 m.s^{-2}</u>

Calcul de la vitesse

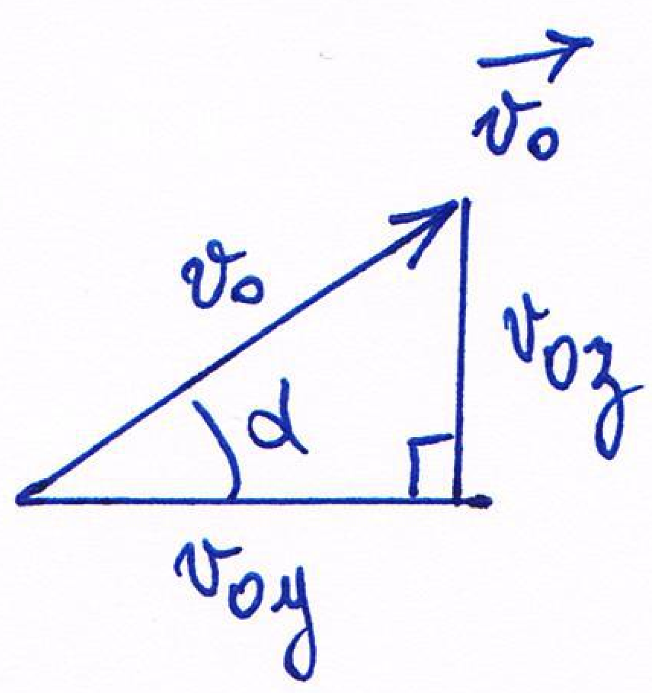
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x = 0 \qquad v_x(t) = A = cte$$

$$\frac{dv_y}{dt} = a_y = 0 \qquad v_y(t) = B = cte$$

$$\frac{dv_z}{dt} = a_z = -g \qquad v_z(t) = -gt + C \quad \text{avec } C = cte$$

Valeurs des constantes A, B et C (instant initial)



$$\cos\alpha = \frac{v_{0y}}{v_0} \qquad v_{0y} = v_0 \cos\alpha \qquad \vec{v_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0\cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\sin\alpha = \frac{v_{0z}}{v_0} \qquad v_{0z} = v_0 \sin\alpha$$

A $t = 0$:

$$v_x(t=0) = A = 0$$
$$v_y(t=0) = B = v_0\cos\alpha$$
$$v_z(t=0) = C = v_0 \sin\alpha$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(t) = 0 \\ v_y(t) = v_0\cos\alpha \\ v_z(t) = -gt + v_0\sin\alpha \end{pmatrix} \begin{matrix} (1') \\ (2') \\ (3') \end{matrix}$$

Calcul du vecteur position

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 0 \qquad x(t) = D = cte$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0\cos\alpha \qquad y(t) = v_0\cos\alpha\, t + E \leftarrow cte$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = -gt + v_0\sin\alpha \qquad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha\, t + F$$

$$f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$$
$$f'(x) = ax + b$$

$$x \leftrightarrow t$$
$$a \leftrightarrow g$$
$$b \leftrightarrow v_0 \sin\alpha$$

Calcul des constantes D, E, F à l'instant initial

A $t=0$: $\vec{OM}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \\ E \\ F \end{pmatrix}$

$D = 0$
$E = 0$
$F = h$

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} x(t) = 0 \\ y(t) = v_0 \cos\alpha\, t \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + h \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

↑

équations horaires du mvt

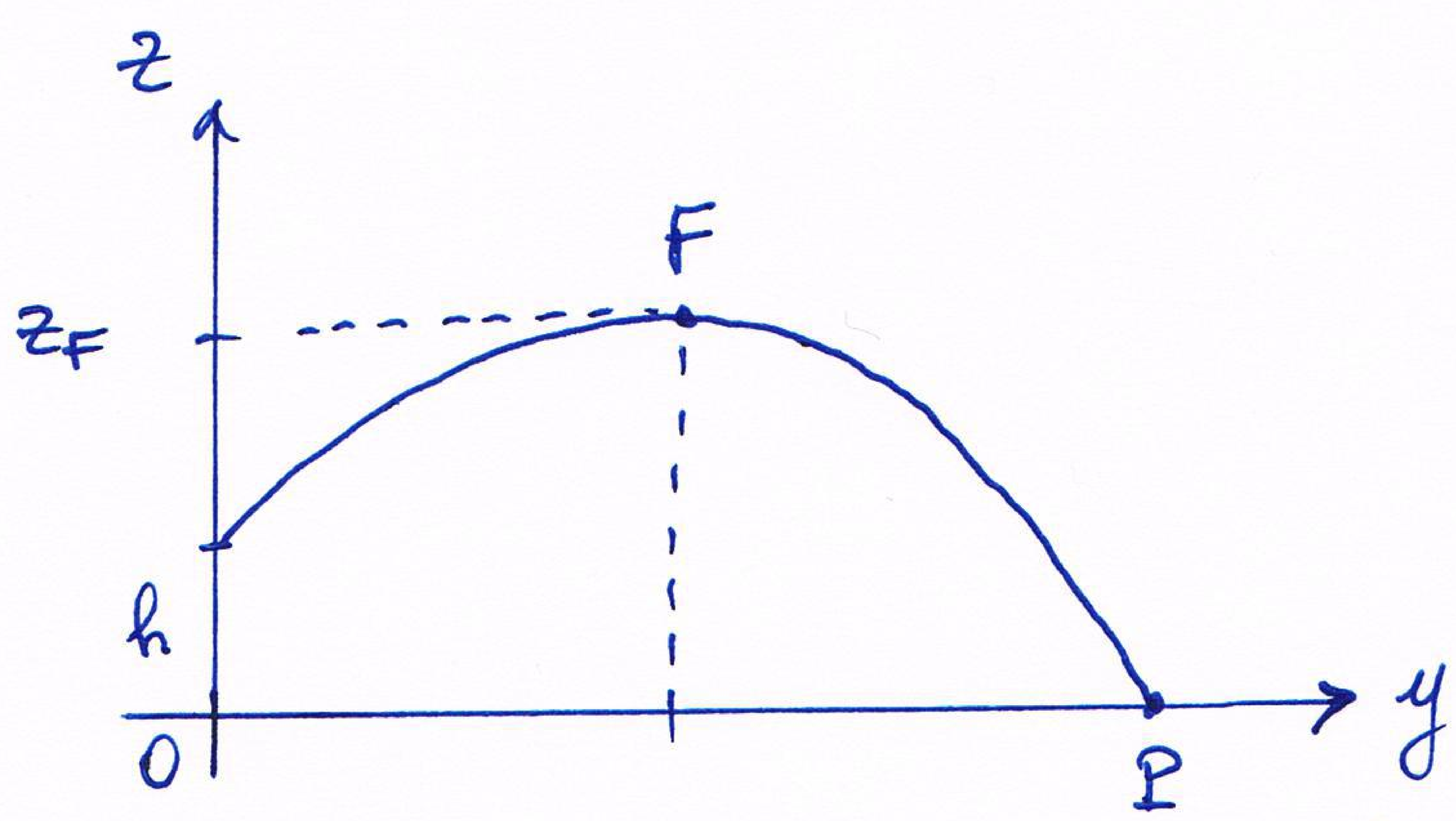
Equation de la trajectoire : on élimine le temps t des éq. horaires → slt x, y et z.

$$t = \frac{y}{v_0 \cos\alpha}$$

$$z = -\frac{1}{2} g \frac{y^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + v_0 \sin\alpha \frac{y}{v_0 \cos\alpha} + h$$

(4)

$$z = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} y^2 + y \tan\alpha + h$$ ← éq. de la trajectoire parabole dont la concavité est tournée vers le bas.



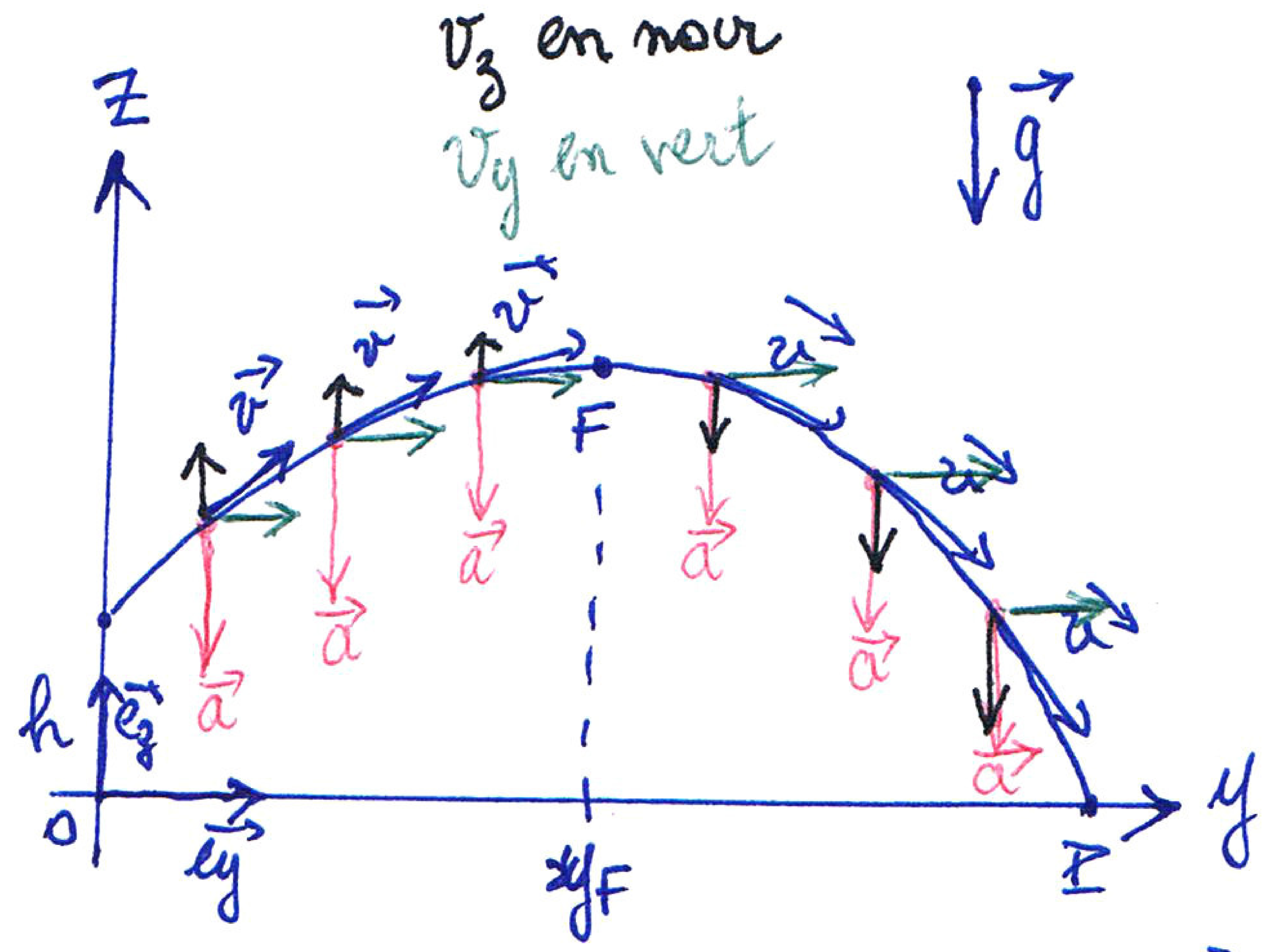
OP = portée du tir
z_F = flèche du tir

Calcul de la portée : on cherche $z_P = 0$ dans éq. (4). → 2 solutions $y_P > 0$

Calcul de la flèche : on cherche $v_z(t_F) = 0$ → t_F éq. (3')
$z_F = z(t_F)$ éq. (3).

Remarques générales :

$$\begin{cases} v_x(t) = 0 \\ v_y(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_z(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$



$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$$

- On remarque que $v_y(t) = cte$: $v_y \vec{e_y} \cdot \vec{a} = 0$
Donc l'accélération ne modifie pas la partie de la vitesse qui lui est perpendiculaire.

- $v_z \vec{e_z} \cdot \vec{a} < 0$ pour $y < y_F$: le mouvement est décéléré.
l'accélération joue à diminuer la partie de la vitesse qui lui est opposée.

- $v_z \vec{e_z} \cdot \vec{a} > 0$ pour $y \geqslant y_F$: le mouvement est accéléré,
l'accélération joue à augmenter la partie de la vitesse qui lui est colinéaire de même sens.

- si à tout instant $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ alors le mouvement est uniforme : $v = cte$ (mais pas forcément $\vec{v}$!)

- Méthode générale :

système = {...}
référentiel galiléen
cinématique : on exprime $\vec{OM}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ avec les notations de l'énoncé.
bilan des forces appliquées au système
2e loi de Newton appliquée au syst. dans ref galiléen
Calcul de la vitesse
Conditions initiales sur $\vec{v}$: on trouve la valeur des cts d'intégration
Calcul du vecteur position $\vec{OM}$
Conditions initiales sur $\vec{OM}$: