Analyse dimensionnelle

Terminale S

Plan du cours

Plan du cours

Grandeur physique

Une **grandeur** physique est une propriété de la nature pouvant être *mesurée* ou *calculée*

Exemples :

- longueur
- pression
- température
- quantité de matière
- ...

Prenons le cas d'une **longueur** :

Pour exprimer la valeur d'une longueur, il va falloir choisir entre plusieurs unités possibles : le mètre, le miles, le pouce (inch), la coudée, ...

Soient $l_1 = 1.2$ m, $l_2 = 12.3$ inch, $l_3 = 52$ coudées.
Ces trois valeurs ont toutes en commun le fait d'être des longueurs : on dit que ces valeurs ont la **dimension** d'une longueur (symbole L).

La notion de dimension n'est donc associée à aucun système d'unité.

Notation à l'aide de crochets :
$\left[l_1\right] = L$ signifie « l_1 a la dimension d'une longueur »

Dimensions et unités d'une grandeur
Le système international
Analyse dimensionnelle

Prenons le cas d'une **durée** :

Pour exprimer la valeur d'une durée, il va falloir choisir entre plusieurs unités possibles : l'année, le mois, le mois lunaire, le jour, l'heure, la minute, la seconde, ...

Toute valeur de durée a la **dimension** d'un temps T.

$\left[\Delta t\right] = T \Leftrightarrow$ « Δt a la dimension d'un temps »

Dimensions et unités d'une grandeur
Le système international
Analyse dimensionnelle

Prenons le cas d'une **vitesse** :

Une vitesse moyenne v est le quotient entre la distance parcourue d et le temps de parcours Δt.

$$v = \frac{d}{\Delta t}$$

La notion de vitesse est donc dépendante de la notion de longueur et de la notion de durée : la dimension d'une vitesse est donc

$$\left[v\right] = \left[\frac{d}{\Delta t}\right] = \frac{L}{T} = L.T^{-1}$$

On vient de faire une analyse dimensionnelle du terme de droite de l'équation : on a remplacé chaque grandeur (d et Δt) par leur dimension.

Dimensions et unités d'une grandeur
Le système international
Analyse dimensionnelle

Résultat important

La dimension de n'importe quelle grandeur physique s'exprime en fonction de quelques dimensions de base indépendantes les unes des autres.

Plan du cours

Dimension de base	Symbole
Longueur	L
Temps	T
Masse	M
Intensité du courant	I
Qtt de matière	n
Température	θ
Intensité lumineuse	

Toute autre dimension s'exprime en fonction de ces dimensions de base.

Face au choix important d'unités possibles et de leurs combinaisons possibles suivant les grandeurs considérées, il a été décidé d'utiliser un système d'unité commun depuis le début des années 80 : le **système international des unités**

Dimension de base	Symbole	Unité SI
Longueur	L	m (mètre)
Temps	T	s (seconde)
Masse	M	kg
Intensité du courant	I	A (ampère)
Qtt de matière	n	mol
Température	θ	K (kelvin)
Intensité lumineuse		cd (candela)

L'analyse dimensionnelle repose sur le fait qu'on ne peut comparer ou ajouter que des grandeurs ayant la même dimension ; on peut ajouter une longueur à une autre, mais on ne peut pas dire qu'elle est supérieure, égale ou inférieure à une masse.

Homogénéité d'une équation

Une équation est dite **homogène** si ses deux membres ont la même dimension.

Addition et soustraction

Cela n'a de sens que pour des grandeurs de même dimension.

La seule opération permise

Il n'y a que la multiplication (et donc la division, car diviser, c'est multiplier par son inverse) qui est possible entre toutes les grandeurs.

La multiplication (et la division) entre 2 grandeurs porte à la fois sur les valeurs numériques **et** sur les dimensions (et les unités éventuelles) de ces grandeurs.

$$v = \frac{10\ \mathrm{m}}{10\ \mathrm{s}} = 1.0\ \mathrm{m.s^{-1}} \qquad \left[Na^+\right] = \frac{0.400\ \mathrm{mol}}{1.0\ \mathrm{L}} = 0.40\ \mathrm{mol.L^{-1}}$$

Généralisation

A l'exception de la fonction `puissance` (qui généralise la multiplication et la division avec un exposant positif ou négatif), toute fonction mathématique ne peut opérer que sur des nombres sans dimension (et renvoie alors un nombre sans dimension).

- L-L = L
- L+L+L = L
- L+T = ... impossible
- $\mathrm{L/T = L.T^{-1}}$
- $\mathrm{L \times L = L^2}$
- $\mathrm{L \times L \times L = L^3}$

A quelle condition « truc + machin = bidule » est une relation homogène ?
Il est nécessaire que $\left[\mathrm{truc}\right] = \left[\mathrm{machin}\right] = \left[\mathrm{bidule}\right]$

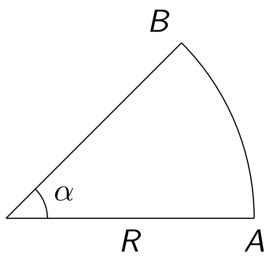
Nombres

Un nombre n'a pas de dimension.
Uniquement dans le cas des angles, il peut avoir une unité !

$$\left[\frac{1}{2}\right] = \left[\pi\right] = \left[36^o\right] = 1$$

Angles

Un angle peut s'exprimer en radian ou en degré, mais un angle n'a pas de dimension (à cause de sa définition).



$\ell =$ longueur de l'arc AB

$$\alpha \text{ (rad)} = \frac{\ell}{R}$$

$$\left[\alpha\right] = 1$$

Périmètre d'un cercle ($\ell = \alpha R$) : $2\pi R$

Fonctions mathématiques

Deux cas possibles :

- la fonction puissance : x^n a pour dimension $\left[x\right]^n$
- toutes les autres fonctions mathématiques : $\left[f(x)\right] = 1$ et $\left[x\right] = 1$

Remarque : $\sqrt{x} = x^{1/2}$ donc $\left[\sqrt{x}\right] = \left[x\right]^{1/2}$

Plan du cours

Pour trouver la dimension d'une grandeur autre que les 7 grandeurs de base du système international, il faut trouver **une formule simple** faisant intervenir la grandeur en question et exprimer la dimension de la grandeur **en fonction uniquement** des 7 dimensions de base.

Analyse dimensionnelle

Faire l'analyse dimensionnelle d'une équation consiste à remplacer chaque grandeur par sa dimension.

Les deux membres d'une égalité **doivent** avoir la même dimension.

Homogénéité d'une formule (rappel)

Une formule est dite **homogène** si ses deux membres ont la même dimension.

La relation $v = d \times \Delta t$ est donc fausse car elle n'est pas homogène.

Attention : une relation homogène n'est pas juste pour autant !
Exemple : $E_c = mv^2$ n'est pas juste même si elle est homogène !

Résultat fondamental

Analyse dimensionnelle

Si une formule n'est pas homogène, elle est forcément fausse.
Si une formule est homogène, elle n'est pas juste pour autant !([1])

([1] : car un nombre n'a pas de dimension. Si la formule est homogène, elle est vraie à une constante numérique près.)