Résultat d'une mesure, précision et incertitudes

Classe de Terminale – Spécialité SPC

Evaluer une incertitude de type A → seconde

Evaluer une incertitude de type B → 1ère

Incertitudes composées → T^{ale}

1. Une mesure sans incertitude n'a pas de sens
2. Evaluer une incertitude de type A
   - Incertitude-type d'une mesure
   - Incertitude-type de la moyenne des mesures
   - Comment estimer ce quelques ?
   - Résultat de la mesure
3. Evaluer une incertitude de type B
4. Incertitude relative
5. Composition des incertitudes
6. Comparaison à une valeur de référence
7. Algorithme de Monte-Carlo

Remarque 1

« Deux personnes différentes obtiennent en TP des résultats différents (normalement proches) »

Peut-on simplement dire qu'une personne manipule bien et pas l'autre ? Ou est-ce plus compliqué ?

Remarque 2

Vous avez été flashé à 96 $\mathrm{km.h^{-1}}$
sur une route limitée à 90 $\mathrm{km.h^{-1}}$.

Que peut-on faire de cette mesure ?

Et si on sait en plus ± 12 $\mathrm{km.h^{-1}}$? ou ± 0.1 $\mathrm{km.h^{-1}}$?

Remarque 3

Il arrive que pour une série de mesures (des données), on ait plusieurs modélisations (modèles).

De quoi avons-nous besoin pour répondre à la question : « est-ce qu'un modèle représente mieux les données qu'un autre ? »

Conclusion

Une mesure dont on ne sait pas avec quelle précision elle a été réalisée ne permet pas de dire grand chose : il faut donc **systématiquement préciser la précision de la mesure**.

Un article scientifique dans lequel on ne précise pas comment on a obtenu les mesures et l'estimation de la précision des mesures n'a pas de valeur scientifique.

En TP, vous devez réfléchir à la précision de votre mesure.

Vocabulaire : « il faut connaître la précision d'une mesure » se dit en terme de physicien « il faut connaître l'**incertitude-type** de la mesure ».

$$\text{précision} = \text{incertitude-type}$$

Il y a deux grandes manières de procéder suivant que

- je peux faire une série de mesure $\rightarrow$ incertitude de type A
- je ne peux faire qu'une seule mesure $\rightarrow$ incertitude de type B

Soit x_0 la vraie valeur que je recherche (**mais que je ne connais pas !**).
Incertitude de type A $\rightarrow$ série de mesures x_i

On peut représenter la ième mesure : $\boxed{x_i = x_0 + e_i}$ où e_i est l'écart entre notre mesure x_i et la vraie valeur qu'on aurait dû trouver dans un monde parfait ! On qualifie e_i d'erreur de mesure !

Notation

On utilise le symbole $\sum$ en mathématiques pour représenter une somme :

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_N$$

Comment représenter la moyenne $\bar{x}$ des mesures x_i avec ce symbole ?

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Si $x_i = x_0 + e_i$, alors que devient cette moyenne $\bar{x}$?

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_0 + e_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_0 + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e_i$$

$$\bar{x} = x_0 + \bar{e}$$

où $\bar{e}$ est l'erreur moyenne :

- si $\bar{e} = 0$, alors $\bar{x} = x_0$
  erreurs aléatoires de mesure $\rightarrow$ statistiques
- si $\bar{e} \neq 0$, alors $\bar{x} \neq x_0$
  erreurs systématiques de mesure $\rightarrow$ connaissance des processus physiques

Définition

On appelle **incertitude-type** de la mesure x_i la quantité

$$u(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Pour calculer $u(x)$:

- Numworks : mode statistique $\rightarrow$ écart-type échantillon
- Python $\rightarrow$ `np.std(liste, ddof=1)`
- Casio : mode statistique $\rightarrow$ $x\sigma n - 1$
- Ti : mode statistique $\rightarrow$ `Sx`

Exemple

Mesure de l'indice optique du plexiglas par des élèves en TP

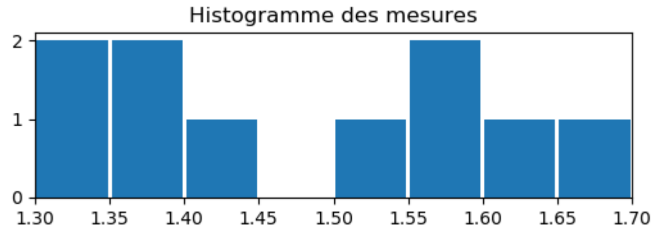
```
valeurs = [1.63, 1.44, 1.32, 1.57, 1.36, 1.52, 1.58,
1.66, 1.34, 1.36]
```

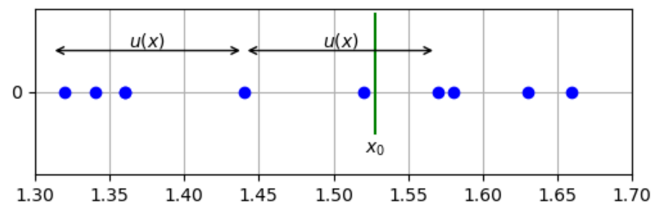
Programme `python/indice_optique.py`

N=10

$\bar{x} = 1.478$

$u(x) = 0.1291682795598224$





Signification de $u(x)$

Si je fais une série de mesure, chaque mesure x_i est à quelques $u(x)$ de la valeur recherchée x_0 (qui est $\bar{x}$ s'il n'y a pas d'erreur systématique).

On a remarqué que $\bar{x}$ était une **meilleure estimation** de x_0 que chaque mesure x_i prise individuellement.

L'incertitude-type sur la moyenne $u(\bar{x})$ sera donc plus petite que l'incertitude-type $u(x)$ d'une mesure

$$u(\bar{x}) = \frac{u(x)}{\sqrt{N}}$$

$\bar{x}$ est $\sqrt{N}$ fois plus précise que l'une des mesures x_i !

Exemple

Mesure de l'indice optique du plexiglas par des élèves en TP

```
valeurs = [1.63, 1.44, 1.32, 1.57, 1.36, 1.52, 1.58,
1.66, 1.34, 1.36]
```

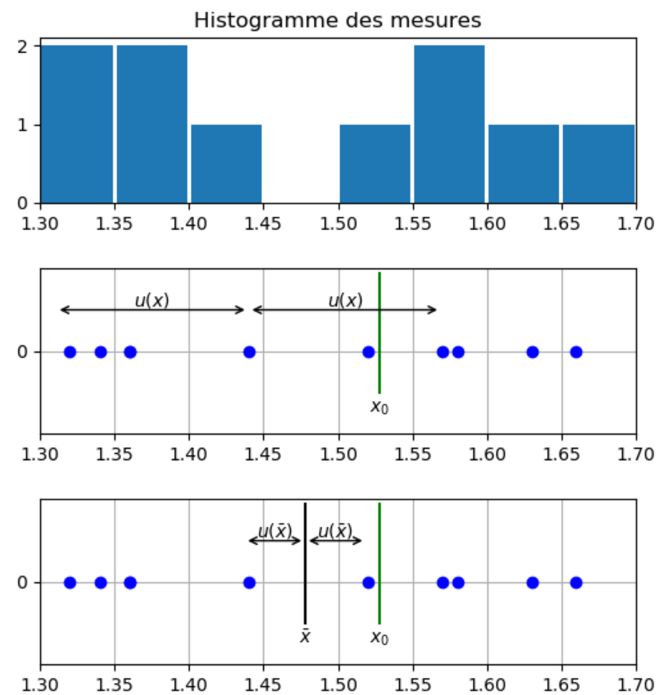
Programme `python/indice_optique.py`

N=10

$\bar{x} = 1.478$

$u(x) = 0.1291682795598224$

$u(\bar{x}) = 0.04084659648544103$



Signification de $u(\bar{x})$

La moyenne $\bar{x}$ des N mesures x_i est à **quelques** $u(\bar{x})$ de la valeur recherchée x_0.

Comment quantifier ce `quelques` ?

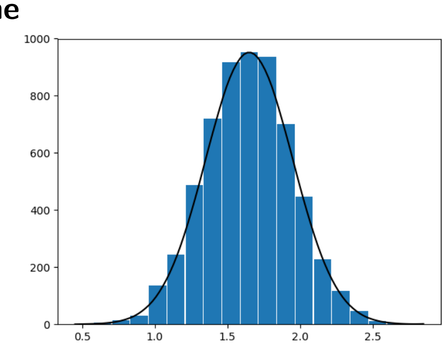
Est-ce qu'il vaut 1, 2, 10, 100, 10 000 ?

1. Une mesure sans incertitude n'a pas de sens
2. Evaluer une incertitude de type A
   - Incertitude-type d'une mesure
   - Incertitude-type de la moyenne des mesures
   - Comment estimer ce quelques ?
   - Résultat de la mesure
3. Evaluer une incertitude de type B
4. Incertitude relative
5. Composition des incertitudes
6. Comparaison à une valeur de référence
7. Algorithme de Monte-Carlo

A quoi ressemblerait l'histogramme du programme `indice_optique.py` si on faisait beaucoup plus de $N = 10$ mesures ?
Sachant qu'on fait plus souvent de petites erreurs que de grandes.

Si $N \to \infty$, alors l'histogramme tend vers une courbe mathématique appelée **gaussienne**

$$f(x) = \frac{1}{u(x)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{u(x)}\right)^2}$$



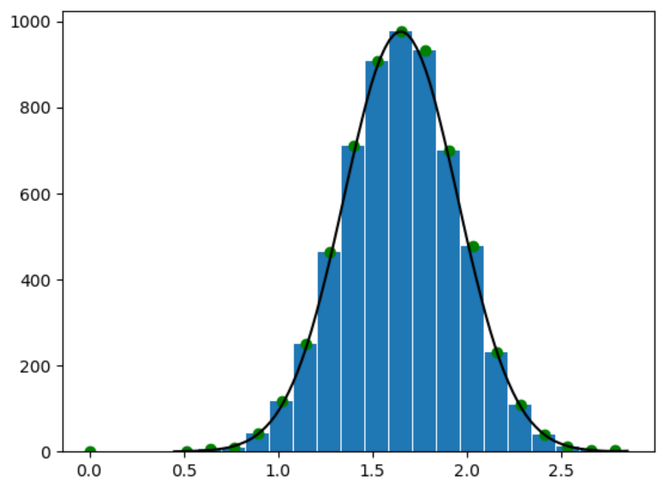
Programme python estimation_quelque.py

Pour estimer le facteur **quelques**, on va tirer aléatoirement N valeurs x_i pour une vraie valeur x_0 (notre moyenne) et une incertitude-type $u(x)$ donnée sur x_i.

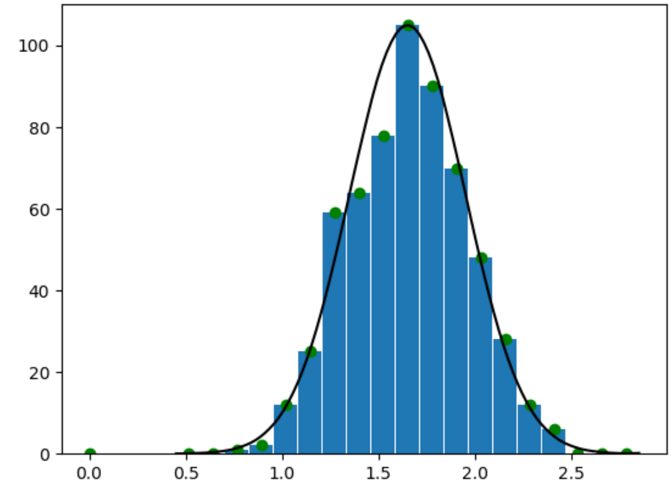
```
import numpy as np
x0, u, N = 1.65, 0.3, 600
valeurs = np.random.normal(x0, u, N)

import matplotlib.pyplot as plt
plt.hist(valeurs, bins=np.linspace(x0-1.2,x0+1.2,20),
         rwidth=0.95)
plt.show()
```

```
x0, u, N = 1.65, 0.3, 6000
67.9% des valeurs dans l'intervalle [x0-1*u; x0+1*u]
95.6% des valeurs dans l'intervalle [x0-2*u; x0+2*u]
97.7% des valeurs dans l'intervalle [x0-3*u; x0+3*u]
```




```
x0, u, N = 1.65, 0.3, 600
66.3% des valeurs dans l'intervalle [x0-1*u; x0+1*u]
96.0% des valeurs dans l'intervalle [x0-2*u; x0+2*u]
97.8% des valeurs dans l'intervalle [x0-3*u; x0+3*u]
```



On voit donc que l'intervalle $[\bar{x} - 2u(\bar{x}), \bar{x} + 2u(\bar{x})]$ contient 95% des valeurs tirées aléatoirement.
On estime donc le facteur **quelque** à un nombre proche de 2 !

Incertitude-type élargie

On appelle **incertitude-type élargie** la quantité $\Delta x = 2 \times u(\bar{x})$.

Signification

Dans 95% des cas, la valeur recherchée x_0 est dans l'intervalle $[\bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x]$.

Résultat de la mesure

Dans le cas d'une incertitude de type A (on fait plusieurs mesures), le résultat de la mesure de x_0 s'écrit sous la forme

$$x_0 = \bar{x} \pm \Delta x$$

1. Δx arrondi **à la hausse**, 1 chiffre significatif
2. écrire $\bar{x}$ et Δx dans les mêmes unités et puissance de 10
3. arrondir $\bar{x}$ normalement

Programme `python/indice_optique.py`
`N=10`
$\bar{x} = 1.478$
$u(x) = 0.129168$
$u(\bar{x}) = \dfrac{u(x)}{\sqrt{N}} = 0.0408465 \rightarrow \Delta x = 2 \times u(\bar{x}) = 0.0816931 = 0.09$
Résultat de la mesure $n = 1.478 \pm 0.09 = 1.48 \pm 0.09$

- Parfois, répéter la mesure ne donne aucune variabilité
- Il peut aussi être impossible de faire plusieurs mesures
- Il peut être pénible de faire plusieurs mesures

il faut donc estimer autrement l'incertitude de la mesure

- On **estime** la plus petite plage dans laquelle on est **certain** de trouver la valeur mesurée x_m
- On note x la **valeur centrale** de cette plage et Δ sa **demi-largeur** : $x_m \in [x - \Delta, x + \Delta]$
- L'incertitude-type de la mesure est $\boxed{u(x_m) = \dfrac{\Delta}{\sqrt{3}}}$

Ici on est certain que $x_m \in [x - \Delta, x + \Delta]$, donc le résultat de la mesure sera noté

$$x_m \pm u(x_m) \qquad u(x_m) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

1. $u(x_m)$ arrondi **à la hausse**, 1 chiffre significatif
2. écrire x_m et $u(x_m)$ dans les mêmes unités et puissance de 10
3. arrondir x_m normalement

Justification de la formule sur un exemple (1/3)

Exemple : on mesure un objet de longueur 16 mm avec une règle graduée en mm. On est certain que la mesure se trouve entre $d_{\text{min}} = 15.5$ et $d_{\text{max}} = 16.5$ mm.
La valeur centrale de cette plage est $x = 16$ mm,
sa demi-largeur est $\Delta = 0.5$ mm,

$$\text{d'où } u(x_m) = \frac{0.5}{\sqrt{3}} = 0.289 \text{ mm}$$

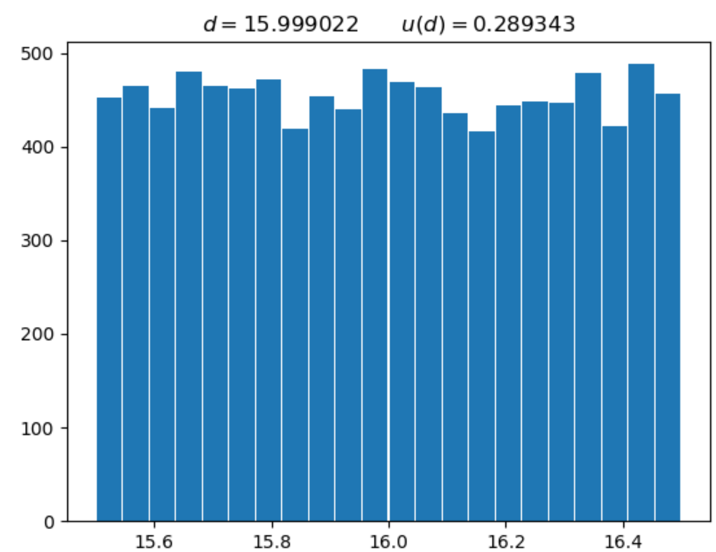
Justification de la formule sur un exemple (2/3)

Estimation de l'incertitude-type
On suppose que la **probabilité** que la longueur soit entre d_{min} et d_{max} est **uniforme** : il n'y a pas d'endroit privilégié entre d_{min} et d_{max}. On dit que la mesure suit une `loi uniforme`.
On peut simuler cela avec python :

```
import numpy as np
dmin, dmax, N = 15.5, 16.5, 10000
liste = [ np.random.uniform(dmin,dmax) for i in range(N) ]
mean = np.mean(liste)
ecart_type = np.std(liste, ddof=1)
print(mean, ecart_type)

import matplotlib.pyplot as plt
plt.hist(liste, bins='auto', rwidth=0.95)
plt.show()
```

Justification de la formule sur un exemple (3/3)



L'écart-type, qui correspond à l'incertitude-type $u(d)$, correspond bien à la valeur $\Delta/\sqrt{3}$

Exercice

Enoncé : une pression est mesurée avec un manomètre différentiel de précision 5%. On obtient une pression de 10.5 bar. Comment écrire le résultat de cette mesure ?

La précision concerne Δ et non l'incertitude-type $u(p)$!

$\Delta = 5/100 * 10.5 = 0.525$ bar
$u(p) = \Delta/\sqrt{3} = 0.3$ bar
On écrit $p = (10.5 \pm 0.3)$ bar

Incertitude relative

On appelle incertitude **relative** le rapport $\dfrac{u(x)}{x}$.

Sur l'exemple précédent : $\dfrac{u(x)}{x} = \dfrac{0.29}{16.00} = 0.018 = 1.8\%$

$y = ax$	$u(y) = \|a\| \times u(x)$
$y = x_1 \pm x_2$	$u(y) = \sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}$
$y = a\, x_1\, x_2$ $y = a\, x_1/x_2$	$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$

1. Quelle formule pour l'incertitude-type de y si $y = x_1 x_2 x_3$?
   $$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{u(x_3)}{x_3}\right)^2}$$
2. Quelle formule pour l'incertitude-type de y si $y = x_1 x_2/x_3$?
   $$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{u(x_3)}{x_3}\right)^2}$$
3. Quelle formule pour l'incertitude-type de y si $y = 1/x$?
   $$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2} = \frac{u(x)}{x}$$

Quand les formules sont plus compliquées, on utilise un algorithme de Monte-Carlo pour déterminer l'incertitude-type $u(y)$.

Ecart expérimental

On mesure x et on compare à une valeur de référence x_{ref}. L'écart expérimental, exprimé en pourcentage, est alors

$$100 \times \left|\frac{x - x_{ref}}{x_{ref}}\right|$$

Cet écart expérimental ne tient pas compte de la précision de la mesure x. Ni, éventuellement, de la précision de la valeur de référence !

Hypothèse : x_{ref} est parfaitement connue !
Si on tient compte de l'incertitude $u(x)$ sur la mesure x, à combien de $u(x)$ est x de x_{ref} ?

Ecart normalisé ou z-score

$$z = \frac{|x - x_{\text{ref}}|}{u(x)}$$

Interprétation : si $z \leq 2$, alors la mesure est **compatible** avec la valeur de référence.

Hypothèse : x_{ref} est a aussi une incertitude $u(x_{\text{ref}})$!

Ecart normalisé ou z-score

$$z = \frac{|x - x_{\text{ref}}|}{\sqrt{u(x)^2 + u(x_{\text{ref}})^2}}$$

Interprétation : si $z \leq 2$, alors la mesure est **compatible** avec la valeur de référence.

Un algorithme de **Monte-Carlo** est un algorithme qui utilise une **source de hasard**.
En python, cela se fait via le module `numpy.random`.

A quoi ça sert ?
Exemple : la vitesse du son dans l'air est théoriquement

$$c_{\text{théo}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$$

Comment évaluer l'incertitude d'une grandeur (ici $c_{\text{théo}}$) quand la formule est compliquée et qu'il y a une incertitude aussi sur la température $T = T_{\text{exp}} \pm u(T)$?

```python
import numpy as np
Texp, uT = ..., ...
Tmin, Tmax, N = Texp-uT, Texp+uT, 1000
liste = [np.random.uniform(Tmin, Tmax, N)]
```

La variable `liste` contient $N = 1000$ valeurs tirées aléatoirement de manière uniforme de la température T_{exp} (`Texp`) avec l'incertitude-type $u(T)$ (`uT`).

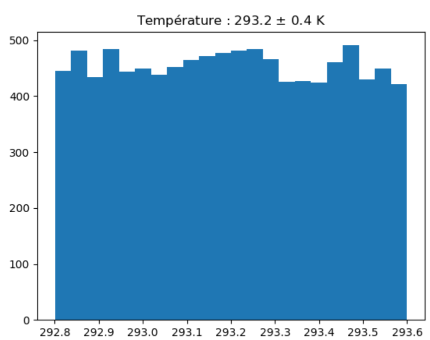
On peut afficher ces N valeurs sous la forme d'un histogramme :

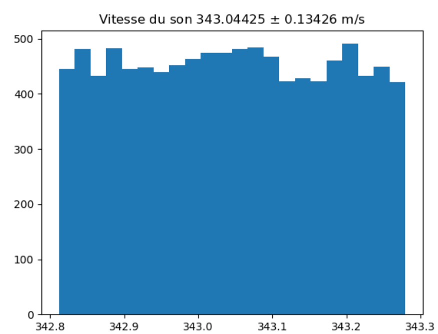
```python
import matplotlib.pyplot as plt
plt.hist(liste, bins='auto')
```

A ces $N = 1000$ valeurs de température contenues dans le tableau `liste`, on peut construire le tableau `ctheo` contenant les $N = 1000$ valeurs correspondantes de vitesse du son dans l'air via la formule

$$c_{\text{théo}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

```python
from math import sqrt
gamma, R, M = 1.4, 8.314, 29.0
ctheo = [np.sqrt(gamma*R*T/M) for T in liste]
plt.hist(ctheo, bins='auto')
```






```python
np.mean(ctheo) # moyenne 343.04425
np.std(ctheo, ddof=1) # incertitude-type 0.13426
```

$$c_{\text{théo}} = (343.0 \pm 0.2) \text{ m/s à } T = (293.2 \pm 0.4) \text{ K}$$